$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3b^2a$$

$$(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(y)^2(2x) + y^3$$

$$= 8x^3+12x^2y+6y^2x+y^3$$

$$(a+b)^3 \longrightarrow$$

$$(a-b)^3 = a^3+(-b)^3+3a^2(-b)+3(-b)^2a$$

$$= a^3-b^3-3a^2b+3b^2a$$

مثال) $x+\frac{1}{x}=5 \Longrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=?$

$$\xrightarrow{\text{توان } 3} x^3+\frac{1}{x^3}+3\cancel{x^2}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)+3\left(\frac{1}{x}\right)^2 x = 5^3$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+\underbrace{3x+\frac{3}{x}}_{\underbrace{3\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{5}}_{15}} = 125$$

$$\Longrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=125-15$$

$$=\boxed{110}$$

مثال) $x+\frac{1}{x}=۳ \longrightarrow x^{۹}+\frac{1}{x^{۹}}=\,?$

توان ۳

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{۳}=۳^{۳} \longrightarrow \underbrace{x^{۳}+\frac{1}{x^{۳}}+\underbrace{۳\cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{۳}}_{۹}}=۲۷$$

$$\Longrightarrow x^{۳}+\frac{1}{x^{۳}}=۱۸$$

توان ۳

$$\left(x^{۳}+\frac{1}{x^{۳}}\right)^{۳}=۱۸^{۳} \Longrightarrow x^{۹}+\frac{1}{x^{۹}}+\underbrace{۳\cancel{x^{۳}}\cdot\frac{1}{\cancel{x^{۳}}}\underbrace{\left(x^{۳}+\frac{1}{x^{۳}}\right)}_{۱۸}}_{۵۴}=۵۸۳۲$$

$$x^{۹}+\frac{1}{x^{۹}}=۵۷۷۸$$

$$\sqrt{۷+\underbrace{۴\sqrt{۳}}_{\div ۲\ \rightarrow\ ۲\sqrt{۳}}}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}=۲+\sqrt{۳}$$

مثال) $\sqrt[۳]{۷+۵\sqrt{۲}}=\,?$

$$(\sqrt{۲})^{۲}\cdot\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$\left(\;۱\;+\;\sqrt{۲}\;\right)^{۳}=۱^{۳}+(\sqrt{۲})^{۳}+۳(۱)\sqrt{۲}+۳(۲)(۱)$$

$$=۷+۵\sqrt{۲}$$

$$=\sqrt[۳]{(۱+\sqrt{۲})^{۳}}=۱+\sqrt{۲}$$

مثال) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = ? = \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3} = 2+\sqrt{3}$

$$(2+\sqrt{3})^3 = \cancel{8} + \underbrace{3\sqrt{3} + 3(4)\sqrt{3}}_{15\sqrt{3}} + \underbrace{3(3)(2)}_{\cancel{18}}$$

مثال) $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} = 1+\sqrt{5}$

$$(1+\sqrt{5})^3 = \cancel{1} + \underbrace{5\sqrt{5} + \underbrace{3(1)(\sqrt{5})}_{3\sqrt{5}}}_{8\sqrt{5}} + \underbrace{3(5)(1)}_{\cancel{15}}$$

یادآوری

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$$

$$(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$$

$$(x+3)^3 = x^3+9x^2+27x+27$$

$\vdots \qquad \vdots$

$(x+5)^3$

مثال) $\boxed{A = x^3+3x^2+3x}$

مقدار عبارت A به ازای $x=\sqrt[3]{5}-1$ چقدر است؟

$$A=(x+1)^3-1 \xrightarrow{x=\sqrt[3]{5}-1} A=(\sqrt[3]{5}\cancel{-1}\cancel{+1})^3-1=5-1=4$$

مثال) حاصل عبارت $B=x^3+6x^2+12x+20$ به ازای $x=\sqrt[3]{7}-2$ چیست؟

۸

$$B=(x+2)^3+12 \xrightarrow{x=\sqrt[3]{7}-2} (\sqrt[3]{7}\cancel{-2}\cancel{+2})^3+12=7+12=\boxed{19}$$

مثال) اگر $C=x^3+18x^2+108x+200$ حاصل عبارت C به ازای $x=\sqrt[3]{7}-6$ چیست؟

$6^3=216$

$$C=(x+6)^3-16$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt[3]{7}-6} (\sqrt[3]{7}\cancel{-6}\cancel{+6})^3-16=7-16=-9$$

بسط دوجمله‌ای نیوتن:

$$(a+b)^n=\,....$$

$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$

$$\text{ضریب جمله}=\frac{\text{توان a در جمله قبل}\times\text{ضریب جمله قبل}}{\text{مرتبه جمله قبل}}$$

$$\frac{4\times3}{2}=6$$

$$\frac{5\times4}{2}=10$$

مثال) $(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$

مثال) $(a+b)^6 = 1a^6 + \underset{\frac{6\times 5}{2}}{6a^5b} + 15a^4b^2 + \underset{\frac{4\times 15}{3}}{20}a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

اتحاد اویلر: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(\underbrace{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}_{\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}})$

$$= (a+b+c)\left(\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\right)$$

نتیجه: $a+b+c=0 \Longrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

مثال) $\boxed{(\underbrace{5x-3}_{A})^3+(\underbrace{1-2x}_{B})^3+(\underbrace{2-3x}_{C})^3=0} \Longrightarrow$ چند مقدار برای x وجود دارد

$$A+B+C=0 \Longrightarrow A^3+B^3+C^3=3ABC$$

$$=3(5x-3)(1-2x)(2-3x)=0 \begin{cases} 5x-3=0 \to x=3/5 \\ 1-2x=0 \to x=1/2 \\ 2-3x=0 \to x=2/3 \end{cases}$$

گویا کردن

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$$

$$\begin{cases} (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \end{cases}$$